U統計量の分布関数の収束速度について (統計的漸近理論)

AUTHOR(S):

多賀, 保志

数理解析研究所講究録
167巻 1972年 6-9

U統計量の分布関数の収束速度について

静大 工学部 多賀 保志

§1. 序

$X_1, X_2, \cdots, X_n$は互いに独立で同一分布$F(x)$にしたがう確率変数で，$F(x)$は3次の絶対積率β_3，分散σ^2，平均0をもつとすれば，$Y_n=(\sigma\sqrt{n})^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$ の分布関数$G_n(y)$ は規準正規分布$\Phi(y)$に 一様に収束し，かつすべてのnについて

$$(1.1) \quad \sup_{-\infty<y<\infty}\left|G_n(y)-\Phi(y)\right|<\frac{C\beta_3}{\sqrt{n}\,\sigma^3}, \quad (C \fallingdotseq 0.9)$$

なる評価式がえられている。(*Berry*, *Esséen* らによって)

一方，U統計量についても，適当な仮定のもとで，それは漸近的に正規分布にしたがうことはよく知られているが，上のような評価式はまだえられていないようである。

ここではチェビシェフ型の不等式と上の評価式を利用して，同様な評価式を求めてみたい。ただし，今のところ十分よい結果はえられておらず，改良の余地があると思われる。

§2. 収束速度

ある分布関数族 $\mathcal{F}=\{F\}$（以下に述べる仮定をみたす）について，推定可能なパラメーター $\theta(F)$ とその不偏推定量 $g(X_1, \cdots\cdots, X_m)$ を考える。いま大きさ $n(>m)$ の標本 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ からつくられる U 統計量

$$(2.1)\quad U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{(i_1,\cdots,i_m)} g^*(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots\cdots, X_{i_m})$$

を考える．ただし，右辺の和は可能な組合せ $(i_1, i_2, \cdots\cdots, i_m)$ にわたり，g^* は g を対称化したものとする（$g \in L_2(F)$）。

よく知られているように，U_n は θ の不偏推定量で，その分散は

$$(2.2)\quad V(U_n) = \frac{m^2}{n}\tau_1^2 + O(n^{-2})$$

ただし　$\tau_1^2 = V[g_1^*(X_1)]$ かつ

$$g_1^*(x_1) = E\{g^*(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m) \mid X_1 = x_1\}$$

であるから，U_n を規準化した Z_n：

$$(2.3)\quad Z_n = \frac{\sqrt{n}}{m\tau_1}(U_n - \theta)$$

を考えると，$E\{Z_n\}=0$　かつ

$$(2.4)\quad V(Z_n) = 1 + \frac{c_1}{n} + O(n^{-2})$$

である。一方

$$(2.5)\quad Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}\,\tau_1}\sum_{i=1}^{n}\left[g_1^*(X_1) - \theta\right]$$

を考えると，$E\{Y_n\}=0$，$V(Y_n)=1$ で，かつ $g^*_1(X_i)$ の3次の絶対積率 β'_3 が存在すれば，(1.1) によって

$$(2.6)\quad \sup_{-\infty<y<\infty}\left|G_n(y) - \Phi(y)\right| < \frac{c\beta'_3}{\sqrt{n}\,\tau_1^3}$$

となる。また，$Cov(Y_n, Z_n)=1$ で，

$$(2.7)\quad E\{(Y_n - Z_n)^2\} = \frac{c_1}{n} + O(n^{-2})$$

となることも容易に確められる。(2.7) より Y_n の分布 G_n と Z_n の分布 H_n との差を評価することができ（チェビシェフ型の不等式をもちい），

$$(2.8)\quad \sup_{-\infty<z<\infty}\left|H_n(z) - G_n(z)\right| \leq C_2 n^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{4}{3}})$$

がえられる。(2.6) と (2.8) より

$$(2.9)\quad \sup_{-\infty<z<\infty}\left|H_n(z) - \Phi(z)\right| \leq C_2 n^{-\frac{1}{3}} + C_3\beta'_3 n^{-\frac{1}{2}} + O(n^{-\frac{4}{3}})$$

なる評価式がえられる。

参考文献

[1] Berry, A. C. (1941): The Accuracy of the Gaussian Approximation of the Sum of Independent Variables, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 49, pp. 122−136。

[2] Esséen, C. G. (1945): Fourier Analysis of Distribution Functions; A Mathematical Study of the Laplace−Gaussian Law, Acta Math., Vol. 77, pp. 1−125。

[3] Esséen, C. G. (1956): A Moment Inequality with an Application to the Central Limit Theorem, Skand. Aktuar. Tidskr., pp. 160−170。

[4] Fraser, D. A. S. (1957): Nonparametric Methods in Statistics, John Wiley, pp. 223−228。